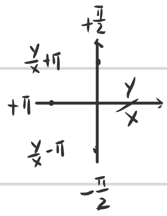
复变函数(工程)期末复习　by 旭龙

期中基础知识

$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$

辐角 $\mathrm{Arg}\,z=\theta=\theta_0+2k\pi$

辐角主值 $\theta_0=\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & x>0\ \ y\in R\\ \pm\frac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0\text{或}y<0\\ \arctan\frac{y}{x}\pm\pi, & x<0,\ y>0\text{或}y<0\\ \pi, & x<0,\ y=0\end{cases}$



乘幂与方根 $\begin{cases} z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=r^ne^{in\theta}\\ w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\quad (k=0,1,2\cdots n-1)\end{cases}$

解析函数 $w=f(z)=u+iv$　$u=u(x,y)$　$v=v(x,y)$

$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A=u_0+iv_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=u_0,\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=v_0$

偏积分法 知u求v (期中常考)

导数：

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ 存在

($\Delta z\to 0$ 方式是任意的)

解析：$w=f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的某个邻域内处处可导

充要条件：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内解析充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 D 内可微 且满足 C-R 方程

初等函数

- 指数函数：$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$　$\begin{cases}|e^z|=e^x\\ e^{z+2k\pi i}=e^z\end{cases}$
- 对数函数：$w=\mathrm{Ln}\,z=\ln|z|+i\,\mathrm{Arg}\,z=\underbrace{\ln|z|+i\arg z}_{\text{主值}\ \ln z}+2k\pi i$
- 三角函数：$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$　$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

  $\mathrm{sh}\,z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$　$\mathrm{ch}\,z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$
- 乘幂　$a^b=e^{b\,\mathrm{Ln}\,a}$

u,v的二阶偏微商也是连续的

因而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$　而由C-R方程可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$　$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$

因此得到 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$　同样 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$　(Laplace方程)

满足 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 的函数称为调和函数 (一般说v是u的共轭调和函数)

Wirtinger微分：$x=\frac{z+\bar{z}}{2}$　$y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

$\frac{\partial f}{\partial z}=f'(z)$　$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$

常用积分

$$\oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n\neq 0 \end{cases}$$

特点：与积分路线圆周的中心和半径无关

Cauthy-Goursat 基本定理 / 复合闭路定理

$f(z)$在多连通域D内解析

C为D内任意一条简单闭曲线

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

扩展：C_1、C_2…C_n为C内部简单闭曲线（不包含相交）

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{C_k} f(z)dz$$

$$\Downarrow$$

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$$

Γ：包含z_0的任何一条正向简单闭曲线

例 $\oint_\Gamma \frac{2z-1}{z^2-z} dz$　Γ为包含$|z|=1$在内的任何简单闭曲线

$= \oint_{C_1} \frac{2z-1}{z^2-z} dz + \oint \frac{2z-1}{z^2-z} dz$　C_1只包含$z=0$　C_2只包含$z=1$

$= \oint_{C_1} \frac{1}{z-1} dz + \oint_{C_1} \frac{1}{z} dz + \oint_{C_2} \frac{1}{z-1} + \oint_{C_2} \frac{1}{z} dz$

$= 0 + 2\pi i + 2\pi i + 0$

$= 4\pi i$

柯西积分公式

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

① C完全包含于D

② z_0为C内任一点

实际上常用

$$\oint \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

高阶导数公式

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

解析函数$f(z)$的导数仍为解析函数

实际上常用

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

例 $\oint_{|z|=4} \left(\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-3}\right) dz = \oint_{|z|=4} \frac{dz}{z+1} + \oint_{|z|=4} \frac{2dz}{z-3} = 2\pi i \cdot 1 + 2\pi i \cdot 2 = 6\pi i$

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{(5-1)!} (\cos \pi z)^{(4)} \Big|_{z=1} = -\frac{\pi^5 i}{12}$$

$$\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_C \frac{\frac{e^z}{(z+i)^2}}{(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{(2-1)!} \left[\frac{e^z}{(z+i)^2}\right]'_{z=i} = \frac{(1-i)e^i}{2} \pi$$

（i为不解析点）

级数 收敛

直接搬过来高数的笔记

对应到复数就行

常数项级数

正项级数

$u_n \geq 0$

比较审敛法： 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \leq v_n$

若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛　$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散

比值审敛法 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值审敛法 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho < 1$ 收敛
$\rho > 1$ 或 ∞ 发散
$\rho = 1$ 收敛/发散

交错级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$

对于 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$　① $u_n \geq u_{n+1}$　② $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$　$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛，其和 $S \leq u_1$

其余项绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$

任意项级数

u_n 是任意数

绝对收敛： $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛

条件收敛： $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

幂级数

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

收敛半径 R： 对于幂级数，必存在一个确定正数 R

使 $|x|<R$ 幂级数绝对收敛　$|x|>R$ 幂级数发散　$x=\pm R$ 收敛/发散

R 求法： 对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 满足 $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$ 或 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{l}, & l \neq 0 \\ +\infty, & l = 0 \\ 0, & l = +\infty \end{cases}$$

绝对收敛性（阿贝尔定理）

若幂级数在 $x = x_1 \neq 0$ 时收敛，则它在 $|x| < |x_1|$ 处绝对收敛

在 $x = x_2$ 时发散，则它在 $|x| > |x_2|$ 处也发散

和函数的连续性 可积性

若幂级数的收敛半径 $R>0$，则和函数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $(-R,R)$ 内连续

并且可积（逐项积分公式）

逐项求积分 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 可逐项积分 $\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt$

逐项求导数（收敛半径 $R>0$） $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R,R)$ 可逐项求导 $S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

实际上搭配 Taylor 公式求和函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad x \in R$ （x 换成 $x\ln a$）　$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n \quad x \in R$

$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad x \in R$ （求导得）　$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad x \in R$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad -1<x<1$　$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad -1<x<1$　$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad -1<x\leq 1$

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad -1<x<1$　$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad -1\leq x\leq 1$

高数

Taylor展开

以z_0为中心圆域内的解析函数$f(z)$可以在该圆域内展开成$z-z_0$幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

① $|z-z_0|<d$

② $C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)\quad n=0,1,2\cdots$

Laurent展开

$f(z)$在z_0处不解析但在以z_0为中心的圆环域内可展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}C_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

① $R_1<|z-z_0|<R_2$

② $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\quad n=0,\pm1,\pm2\cdots$

经常利用 $\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\quad |z|<1$

$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2+\cdots+(-1)^nz^n+\cdots\quad |z|<1$

例

① $\frac{1}{(1+z)^2}$ 在 $|z|<1$内处处解析

$\frac{1}{(1+z)^2}=-\left(\frac{1}{1+z}\right)'=1-2z+3z^2-4z^3+\cdots+(-1)^{n-1}nz^{n-1}+\cdots\quad |z|<1$

② $\ln(1+z)$在$|z|<1$内处处解析

$\ln(1+z)=\int_0^z\frac{1}{1+z}dz=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\cdots\quad |z|<1$

③ $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ 在 $0<|z|<+\infty$ 内是处处解析的

$f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}=z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\cdots\right)=z^3+z^2+\frac{z}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!z}+\cdots$

④ $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内 $\left|\frac{2}{z}\right|<1$

$\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\cdots\right)$

$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$

$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\cdots$

留数

孤立奇点的分类（在孤立奇点的邻域内 laurent 展开）

(1) 没有负次幂项 $\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$ $z=z_0$ 称为可去奇点

(2) 只有有限多个负次幂项 $\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots$ $z=z_0$ 称为 m 级极点

(3) 有无穷多个负次幂项 $e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$ $z=z_0$ 称为本性极点

性质

若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点 $\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}f(z)=C_0$ $f(z)$ 在 z_0 解析

若 z_0 为 $f(z)$ 的 $m(m\geq1)$ 级极点 $\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$ $(C_{-m}\neq0,\ m\geq1) \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$

$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$ 其中 $g(z)=C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+C_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots$

$g(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内是解析函数且 $g(z)\neq0$

若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点 $\Leftrightarrow f(z)$ 的洛朗级数有无穷多项负次幂项 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}f(z)$ 不存在也不为 ∞

留数 $f(z)$ 在 z_0 邻域内的洛朗级数中 $(z-z_0)^{-1}$ 的系数 C_{-1}

$$\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz$$

留数定理 C 是 D 内包围孤立奇点 $z_1,z_2\cdots z_n$ 的一条正向简单闭曲线，$f(z)$ 除 z 外处处解析

☆☆☆

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),z_k]$$

规则I z_0 为 $f(z)$ 一级极点 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$

规则II z_0 为 $f(z)$ m 级极点 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z-z_0)^m f(z)\}$

规则III 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ $P(z)$ 及 $Q(z)$ 在 z_0 都解析 如果 $P(z_0)\neq0$, $Q(z_0)\neq0$ $Q'(z_0)\neq0$

那么 z_0 为 $f(z)$ 一级极点，而 $\mathrm{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$

例① $\oint_{|z|=2} \frac{5z-2}{z(z-1)^2} dz$

由规则I: $Res[f(z),0] = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{5z-2}{(z-1)^2} = -2$

由规则II: $Res[f(z),1] = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 1} \frac{d(z-1)^2 \cdot \frac{5z-2}{z(z-1)^2}}{dz} = \lim_{z\to 1}(\frac{5z-2}{z})' = \lim_{z\to 1} \frac{2}{z^2} = 2$

由留数定理: $\oint_{|z|=2} f(z)dz = 2\pi i \, Res[f(z),0] + 2\pi i \, Res[f(z),1] = 0$

② $\oint_C \frac{z}{z^4-1} dz$ $\quad C$: 正向 $|z|=2$

4个一级极点: ± 1 $\pm i$

由规则III: $\frac{P(z)}{Q'(z)} = \frac{z}{4z^3} = \frac{1}{4z^2}$ 分别代入 ± 1、$\pm i$ 有

$\oint_C \frac{z}{z^4-1} dz = 2\pi i(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}) = 0$

③ $\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$

$z=0$ 为三级极点

由II: $Res[f(z),0] = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{d^2[z^3 f(z)]}{dz^2} = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} (\cos z)'' = -\frac{1}{2}$

$\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = 2\pi i \, Res[f(z),0] = -\pi i$

留数与定积分 考试三选二

一、形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$

①积分区域转化 ②被积函数转化

令 $z = e^{i\theta}$ $\quad dz = ie^{i\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$

$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{z^2-1}{2iz}$

$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{z^2+1}{2z}$

$$\left\{ \begin{aligned} d\theta &= \frac{dz}{iz} \\ \sin\theta &= \frac{z^2-1}{2iz} \\ \cos\theta &= \frac{z^2+1}{2z} \end{aligned} \right.$$

当 θ 从 $[0, 2\pi]$ $\quad z$ 沿 $|z|=1$ 正方向绕行一圈

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = \oint_{|z|=1} R[\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}] \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k]$$

例：计算 $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+\sin^2 x}$ $(a>0)$

$$= \int_0^{\pi} \frac{dx}{a+\frac{1-\cos 2x}{2}} \quad 令 2x=t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\frac{1-\cos t}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{|z|=1} \frac{1}{a+\frac{1-(z^2+1)/2z}{2}}\,\frac{dz}{iz}$$

$$= 2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2-2(2a+1)z+1}$$

极点 $z_1=2a+1-\sqrt{(2a+1)^2-1}$ 在单位圆内 (z_2在外)

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+\sin^2 x} = 2\pi i\cdot 2i\,\mathrm{Res}[f(z), z_1) \quad 太[illegible]$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{(2a+1)^2-1}}$$

二、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$

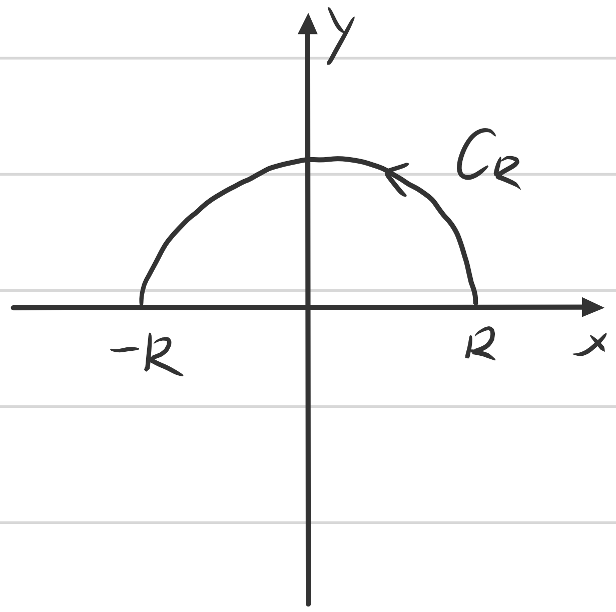
① $R(x)$分母至少比分子高两次

② 分母在实轴上无孤立奇点

先讨论 $\int_{-R}^{R} R(x)dx$ 再令 $R\to\infty$

设 $R(z)=\frac{z^n+a_1 z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1 z^{m-1}+\cdots+b_m}$，$m-n\geq 2$

采用围道积分法，取 R 适当大使 $R(z)$ 所有上半平面极点被包围



$$\int_{-R}^{R} R(x)dx + \int_{C_R} R(z)\,dz = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z), z_k]$$

$$\downarrow$$

$R\to+\infty$ $\int_{C_R} R(z)dz \to 0$

$$\int_{-R}^{R} R(z)dz \to \int_{-\infty}^{\infty} R(z)dz = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z), z_k]$$

例：计算 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$ $(a>0, b>0, a\neq b)$

$R(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)}$ 上半平面：$z_1=ai$ 二级 $\mathrm{Res}[R(z),z_1]=\left[\frac{1}{(z+ai)^2(z^2+b^2)}\right]'\Big|_{z=ai}$

$z_2=bi$ 一级 $\mathrm{Res}[R(z),z_2]=\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z+bi)}\Big|_{z=bi}$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}$

$$= 2\pi i\left[\frac{b^2-3a^2}{4a^3 i(b^2-a^2)^2} + \frac{1}{2bi(b^2-a^2)^2}\right]$$

$$= \frac{(2a+b)\pi}{2a^3 b(a+b)^2}$$

三、形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx\ (a>0)$ 要求分母次至少比分子次高一次

② $R(z)$ 在实轴上无孤立奇点

推导与(二)相近　结论 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{aix}dx = 2\pi i\sum \mathrm{Res}[R(z)e^{aiz}, z_k]$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\cos ax\,dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\sin ax\,dx$$

例　计算: $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx\quad (m>0,\ a>0)$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+a^2)^2}e^{imx}dx\right]$$

对于 $f(z)=\frac{z}{(z^2+a^2)^2}e^{imz}$ 上半平面内只有 $z=ai$ 二级

$$\mathrm{Res}[f(z), ai] = \frac{d}{dz}\left[\frac{z}{(z+ai)^2}e^{imz}\right]_{z=ai} = \frac{m}{4a}e^{-ma}$$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+a^2)^2}e^{imx}dx = 2\pi i\cdot\frac{m}{4a}e^{-ma} = \frac{m\pi i}{2a}e^{-ma}$

故 $\int_0^{+\infty} \frac{x\sin mx}{(x^2+a^2)}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{m\pi}{2a}e^{-ma} = \frac{m\pi}{4a}e^{-ma}$

以下为日常笔记

复变函数及积分变换《工数》

by 旭

定义 $z=x+iy\in\mathbb{C}$ complex　　共轭复数 $\bar{z}=x-iy$

实部 $x=\mathrm{Re}\,z$　　虚部 $y=\mathrm{Im}\,z$

四则运算

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

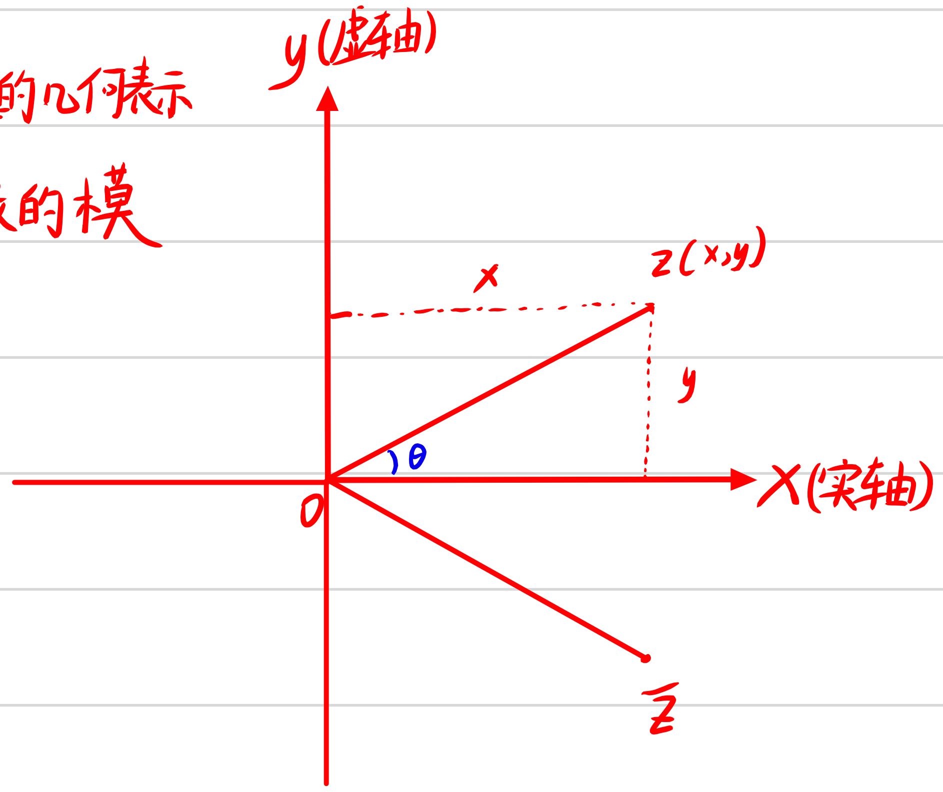
$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2-iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{x_2^2+y_2^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$

复数的几何表示

复数的模



辐角 $\theta=\mathrm{Arg}\,z\in(-\pi,\pi]$

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$
$$=re^{i\theta}$$

可以得到共轭复数的性质

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2\qquad \overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\qquad z\bar{z}=|z|^2$$

$$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)\qquad z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$$

复数的乘幂与方根

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\qquad |z_1z_2|=r_1r_2$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]\qquad \mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}\,z_1+\mathrm{Arg}\,z_2$$

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

复变函数

设G为给定的平面点集，若对于G中每一个复数$z=x+iy$，按照某一确定的法则f，总有确定的一个或几个复数$w=u+iv$与之对应，则称w是G上的关于z的复变函数，简称复变函数，记作$w=f(z)$.

其中z称为自变量，w称为因变量，点集G称为函数的定义域.

$w=f(z)=f(x+iy)$

$\quad =u(x,y)+iv(x,y)$

即 定义一个复变函数 $w=f(z)$

相当于定义两个二元实函数

$u=u(x,y) \quad v=v(x,y)$

复数的几何意义 — 映射

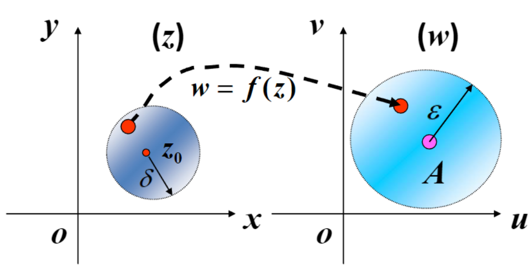
0

复变函数的极限和连续性

定义 设 $w=f(z)$，$z\in U^{\circ}(z_0,\rho)$，若存在数A，$\forall\varepsilon>0$，$\underset{(0<\delta\le\rho)}{\exists\delta(\varepsilon)}$，当$0<|z-z_0|<\delta$时，有$|f(z)-A|<\varepsilon$，

则称A为$f(z)$当$z\to z_0$时的极限，记作 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$

或当$z\to z_0$时，$f(z)\to A$



几何意义:
当变点z一旦进入z_0的充分小去心邻域时，它的象点$f(z)$就落入A的一个预先给定的ε邻域中

设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

$z=x+iy \quad z_0=x_0+iy_0$

则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A=u_0+iv_0 \Longleftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0\\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0\end{cases}$

例:

$$\lim_{z\to 1+i}\frac{\bar z}{z}$$
$$=\lim_{z\to 1+i}\frac{x-iy}{x+iy}$$
$$=\lim_{z\to 1+i}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\frac{-2xy}{x^2+y^2}\right)$$
$$=\lim_{z\to 1+i}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\lim_{z\to 1+i}\frac{-2xy}{x^2+y^2}$$
$$=-i$$

$$\lim_{z\to 1+i}\frac{\bar z}{z}=\frac{\lim\limits_{z\to 1+i}\bar z}{\lim\limits_{z\to 1+i} z}=\frac{1-i}{1+i}=-i$$

$$\lim_{z\to 1}\frac{z\bar z-\bar z+z-1}{z-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(\bar z+1)}{z-1}=\lim_{z\to 1}(\bar z+1)=2$$

复变函数的导数

复变函数导数的定义

一、复变函数的导数与微分

1. 导数的定义

设$w=f(z)$在区域D上有定义，z_0为D中一点，点$z_0+\Delta z=z\in D$.

如果极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$存在，

则说$f(z)$在z_0可导，此极限值称为$f(z)$在z_0的导数.

记作：$f'(z_0)=\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=z_0}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

令 $z=x+iy$　$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$　$\Delta f=f(z+\Delta z)-f(z)$

$\Delta z\to 0$ 的方式是任意的

如果$f(z)$在区域D内处处可导

则说$f(z)$在D内可导

例如：$f(z)=x+2yi$

定义域：全体复平面

任取一点z_0

则 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

$=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{x_0+\Delta x+2(y_0+\Delta y)i-(x_0+2y_0i)}{\Delta x+\Delta yi}$

$=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}$

$z_0+\Delta z$沿平行于x轴直线接近z_0时

$\Delta y=0$　$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x}=1$

$z_0+\Delta z$沿平行于y轴直线接近z_0时

$\Delta x=0$　$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta x+2\Delta yi}{\Delta x+\Delta yi}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{2\Delta yi}{\Delta yi}=2$

所以$f(z)=x+2yi$在其定义域内处处不可导

$f(z)=|z|^2$

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$

$=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{|z+\Delta z|^2-|z|^2}{\Delta z}$

$=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{(z+\Delta z)(\bar z+\overline{\Delta z})-z\bar z}{\Delta z}$

$=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\bar z+\overline{\Delta z}+z\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)$

$z=0$时极限为0　故$f(z)$在$z=0$处可导

$z\neq 0$时　Δz沿平行于实轴方向趋向0

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\bar z+\overline{\Delta z}+z\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)=\bar z+z$

Δz沿平行于虚轴方向趋向0

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\left(\bar z+\overline{\Delta z}+z\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right)=\bar z-z$

所以$f(z)$在$z\neq 0$处处不可导

可导 $\Rightarrow$ 连续

证明：$\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)]=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

$=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$

$=0\cdot f'(z_0)$

$=0$　　故$f(z)$在z_0处连续

解析函数

二. 解析函数的概念

定义 如果函数$w=f(z)$在z_0及z_0的某个邻域内处处可导，则称$f(z)$在z_0解析；

如果$f(z)$在区域D内每一点都解析，则称$f(z)$在D内解析，或称$f(z)$是D内的解析函数（全纯函数或正则函数）。

如果$f(z)$在点z_0不解析，就称z_0是$f(z)$的奇点。

(1) $w=f(z)$ 在 D 内解析$\Leftrightarrow$ 在D内可导。

(2) 函数$f(z)$在 z_0 点可导，未必在 z_0 解析。

$w=z^2$处处可导，故是整个复平面上的解析函数

$w=\frac{1}{z}$ 除去$z=0$点外是整个复平面上的解析函数

$w=|z|^2$在整个复平面内处处不解析

解析比可导更严格

解析要求在一点及其邻域可导

解析函数的充要条件

设 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在$z=x+iy$处可导

则 $\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{[u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)]-[u(x,y)+iv(x,y)]}{\Delta x+i\Delta y}$

对于$z+\Delta z\to z$

若沿平行于实轴方式($\Delta y=0$) $f'(z)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

若沿平行于虚轴方式($\Delta x=0$) $f'(z)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\Delta y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

要使$f'(z)$存在，则必有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ (必要性)

Cauchy-Riemann方程

函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在D内解析的充要条件是$u(x,y)$和$v(x,y)$在D内可微

且满足Couthy-Riemann方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$

初等函数拓展至复变数

1. 指数函数

定义复指数函数 $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$

1. 定义域为全体复平面，定义域内处处解析，$(e^z)' = e^z$
2. $|e^z| = e^x$，$\mathrm{Arg}\, e^z = y + 2k\pi$ $(k = 0, \pm1, \pm2 \cdots)$
3. $e^z \neq 0$
4. $w = e^z$ 是单值函数
5. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$
6. $e^{z + 2k\pi i} = e^z$
   即 e^z 是以 $2k\pi i$ 为周期的周期函数

2. 对数函数

定义复变量对应的对数函数 $w = \mathrm{Ln}\, z$

令 $z = re^{i\theta}$ $w = u + iv$

则 $e^{u+iv} = re^{i\theta} \Rightarrow u = \ln r$ $v = \theta + 2k\pi$ (多值)

定义主值 $w = \ln z = \ln|z| + i\arg z$

那么 $\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2k\pi i$

1. $w = \mathrm{Ln}\, z$ 是定义去掉原点后的整个复平面上的多值函数
2. $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$ $\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$

而 $\mathrm{Ln}\, z^2 = 2\mathrm{Ln}\, z$、$\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}\, z$ 等将不再成立

变为 $\mathrm{Ln}\, z^2 = 2\mathrm{Ln}|z| + i\, 2\arg z + 2k\pi i$

$\mathrm{Ln}\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}\mathrm{Ln}|z| + i\frac{1}{n}\arg z + 2k\pi i$

3. 三角函数和双曲函数

定义 $\sin z = \dfrac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}$ $\cos z = \dfrac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$

$\mathrm{sh}\, z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ $\mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^z + e^z}{2}$

1. 周期 $T = 2\pi$
2. 在复平面上处处解析
3. $\sin z$ 为奇函数 $\cos z$ 为偶函数
4. $|\sin z| \leq 1$ $|\cos z| \leq 1$ 不再成立
5. 双曲正余弦

4. 乘幂与幂函数

定义乘幂 $a^b = e^{b\mathrm{Ln}\, a} = e^{b(\ln a + i \cdot 2k\pi)}$ 一般为多值

复变函数的积分

设$f(z)$在单连通区域B内解析 $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1)-F(z_0)$

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{(z-z_0)^{n+1}} = \begin{cases} 2\pi i & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

Stokes公式 $\int_{\partial\Omega} \omega = \iint_\Omega d\omega$ （高维也成立）

Cauthy-Goursat积分公式 若$U\subseteq \mathbb{C}$为有界域，∂U为可求长简单闭曲线，若$f(z)$在U上全纯，在$\bar{U}$上连续

则有 $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial U} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \qquad \int_{\partial U} f(\zeta)d\zeta = 0$

级数

复数列的极限

定义 设复数列:$\{\alpha_n\}(n=1,2,\cdots)$,其中$\alpha_n=a_n+ib_n$,
又设复常数:$\alpha=a+ib$,
若$\forall\varepsilon>0,\exists N>0,\ni n>N$,恒有$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$,
那么α称为复数列$\{\alpha_n\}$当$n\to\infty$时的极限,
记作$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$,或当$n\to\infty$时,$\alpha_n\to\alpha$,
此时,也称复数列$\{\alpha_n\}$收敛于α.

对于 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha \iff \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \quad \lim\limits_{n\to\infty}=b$

证明: 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$ 即 $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0$ 当 $n>N$ 时 恒有 $|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$

又 $|\alpha_n-\alpha|=|(a_n-a)+i(b_n-b)|=\sqrt{(a_n-a)^2+(b_n-b)^2}$

$\therefore |a_n-a|\le|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon \quad |b_n-b|\le|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon$ (直角边不大于斜边)

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a \quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 时

即 $\forall\varepsilon>0\ \exists N>0$ 当 $n>N$ 时 恒有 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2} \quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2}$

又 $|\alpha_n-\alpha|=|(a_n-a)+i(b_n-b)|\le|a_n-a|+|b_n-b|<\varepsilon$ 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha$

级数几个定理及判别

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛 $\iff \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 均收敛

证明: 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+ib_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+i\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\sigma_n+i\tau_n$

由上证明有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a+ib \iff \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=a \quad \lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=b \iff \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 收敛的必要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$

Taylor展开

设$f(z)$在D内解析，$z_0\in D$ R为z_0到D边界各点的最短距离

当$|z-z_0|<R$时有 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ 其中 $C_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

解析函数展开为幂级数是唯一的，实际上是Taylor级数

$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$

结合幂级数的逐项求导性质类推得$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$，$n=0,1,2\cdots$（唯一）

Laurent展开

设$f(z)$在D：$R_1<|z-z_0|<R_2$内解析则在D：$R_1<|z-z_0|<R_2$上的Laurent级数

为$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$ 其中 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ $(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$

留数

孤立奇点 若$f(z)$在z_0处不解析，但在z_0的某个去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内解析

则称z_0为$f(z)$的孤立奇点

但奇点未必是孤立的，例如 $z=0$不是$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ 的孤立奇点

孤立奇点的分类（在孤立奇点的领域内 laurent展开）

(1) 没有负次幂项 $\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$ $z=z_0$称为可去奇点

(2) 只有有限多个负次幂项 $\frac{e^z}{z}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}=\frac{1}{z}+1+\frac{z}{2!}+\cdots+\frac{z^{n-1}}{n!}+\cdots$ $z=z_0$称为m级极点

(3) 有无穷多个负次幂项 $e^{\frac{1}{z}}=1+z^{-1}+\frac{1}{2!}z^{-2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{-n}+\cdots$ $z=z_0$称为本性奇点

若z_0为$f(z)$的可去奇点 $\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}f(z)=C_0$ $f(z)$在z_0解析

若z_0为$f(z)$的$m(m\geq1)$级极点 $\Leftrightarrow f(z)=\sum_{n=-m}^{+\infty}C_n(z-z_0)^n$ $(C_{-m}\neq0, m\geq1) \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$

$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)$ 其中 $g(z)=C_{-m}+C_{-m+1}(z-z_0)+C_{-m+2}(z-z_0)^2+\cdots$

$g(z)$在$|z-z_0|<\delta$内是解析函数且$g(z_0)\neq0$

若z_0为$f(z)$的本性奇点 $\Leftrightarrow$ $f(z)$的洛朗级数有无穷多项负次幂项 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}f(z)$不存在也不为$\infty$

留数定义

设z_0为$f(z)$的孤立奇点，$f(z)$在邻域内的洛朗级数中负幂次项$(z-z_0)^{-1}$的系数C_{-1}称为

$f(z)$在z_0的留数，记作$\mathrm{Res}[f(z),z_0]$或$\mathrm{Res}f(z_0)$

留数定理

若$f(z)$在域$U\subseteq C$上除了$z_1\ z_2\cdots z_n$之外是全纯的，且$f(z)$在$\overline{U}$上除$z_1, z_2\cdots z_n$之外是连续的

∂U为可求长简单闭曲线 则 $\int_{\partial U}f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k)$

补充

1. C-R 方程的充分性证明:

记 $\alpha = u_x(x_0,y_0)$ $\beta = v_x(x_0,y_0)$

那么 $u(x,y) - u(x_0,y_0) = \alpha(x-x_0) - \beta(y-y_0) + \varepsilon_1(|\Delta z|)$ ①

$v(x,y) - v(x_0,y_0) = \beta(x-x_0) + \alpha(y-y_0) + \varepsilon_2(|\Delta z|)$ ②

其中 $|\Delta z| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$$\lim_{|\Delta z|\to 0} \frac{\varepsilon_1(|\Delta z|)}{\Delta z} = \lim_{|\Delta z|\to 0} \frac{\varepsilon_2(|\Delta z|)}{\Delta z} = 0$$

将②式乘 i 后与①式相加

可得 $f(z) - f(z_0) = (\alpha + i\beta)(z - z_0) + \varepsilon_1(|\Delta z|) + i\varepsilon_2(|\Delta z|)$

即为 $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - (\alpha + i\beta) = \dfrac{\varepsilon_1(|\Delta z|) + i\varepsilon_2(|\Delta z|)}{z - z_0}$

所以 $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \alpha + i\beta$

即 $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i v_x(x_0,y_0)$

2. 如果 $f(z)$ 在其定义域上每一点都可微,则称 $f(z)$ 为其定义域上的解析函数/全纯函数

如果 $f(z) = u + iv$ 在 D 上全纯,则其微商 $f'(z)$ 也是 D 上全纯函数

所以 u, v 的二阶偏微商也是连续的

因而 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ 而由 C-R 方程可得 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

因此得到 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 同样 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ (Laplace 方程)

满足 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 的函数称为调和函数

$f(z)$在z_0处解析
① $f(z)$在z_0的某一邻域内可导
② $f(z)$的实部和虚部在z_0某一邻域内有连续偏导数且满足C-R方程
③ $f(z)$在z_0的某一邻域内连续且沿邻域内任一条正向封闭路线积分为0
④ $f(z)$在z_0的某一邻域内可展成幂级数

3. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0 \iff$ C-R方程

$f(z)=u+iv$ 满足C-R: $u_x=v_y \quad u_y=-v_x$

而 $\begin{cases} z=x+iy \\ \bar{z}=x-iy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{z+\bar{z}}{2} \\ y=\frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_z=x_{\bar{z}}=\frac{1}{2} \\ y_z=\frac{1}{2i} \quad y_{\bar{z}}=-\frac{1}{2i} \end{matrix}$

$u_{\bar{z}}=u_x\cdot x_{\bar{z}}+u_y\cdot y_{\bar{z}}=\frac{1}{2}u_x-\frac{1}{2i}u_y=\frac{1}{2}(u_x+iu_y)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=u_{\bar{z}}+iv_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(u_x+iu_y)+\frac{i}{2}(v_x+iv_y)\\ &=\frac{1}{2}u_x+\frac{i}{2}u_y+\frac{i}{2}v_x-\frac{1}{2}v_y\\ &=\frac{1}{2}(u_x-v_y)+\frac{i}{2}(u_y+v_x) = 0\end{aligned}$$

必考